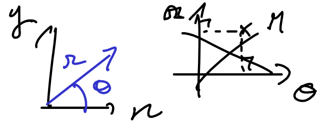
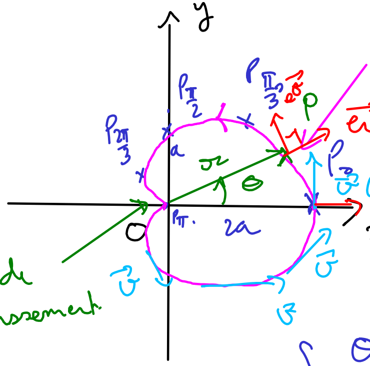
TD M1 - Cinématique



M1 - Cardioïde

1/

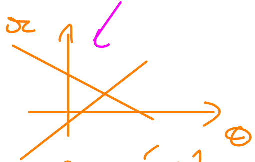


cours ! ↳ cardioïde.

$\vec{e_r} = \frac{\vec{OP}}{OP}$

axe polaire.

⚠



ce n'est pas la trajectoire

eq : $r(\theta) = a(1+\cos\theta)$

$$\begin{cases} \theta = 0, & r = 2a. & : P_0 \\ \theta = \frac{\pi}{3}, & r = a(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}a & : P_{\frac{\pi}{3}} \\ \theta = \frac{\pi}{2}, & r = a & : P_{\frac{\pi}{2}} \\ \theta = \frac{2\pi}{3}, & r = \frac{a}{2} & : P_{\frac{2\pi}{3}} \\ \theta = \pi, & r = 0 & : P_\pi \end{cases}$$

+ $r(-\theta) = r(\theta)$ ✓

$\Rightarrow$ sym /Ox

3/ $\begin{cases} \dot\theta = \omega \\ \theta = 0 \quad \text{à } t = 0 \end{cases}$

3.1/ $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot\theta\,\vec{e_\theta}$

avec $r = a(1+\cos\theta) \Rightarrow \dot{r} = -a\dot\theta\sin\theta = -a\omega\sin\theta$

$\dot\theta = \omega$.

Homogène !

D'où : $\vec{v} = \begin{pmatrix} \overbrace{-a\omega}^{L\,T^{-1}}\sin\theta \\ \\ \underbrace{a\omega}_{L\,T^{-1}}(1+\cos\theta) \end{pmatrix}_{(\vec{e_r},\,\vec{e_\theta})}$, $\vec{v} = -a\omega\sin\theta\,\vec{e_r} + a\omega(1+\cos\theta)\,\vec{e_\theta}$

Cas limite/particulier : si $\theta = 0$ $\vec{v}(\theta=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 2a\omega > 0 \end{pmatrix}$ cohérent avec le graphe !

3.2./ $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{(-a\omega\sin\theta)^2 + (a\omega(1+\cos\theta))^2}$

$$\vec{v} = -a\omega\sin\theta\,\vec{e_r} + a\omega(1+\cos\theta)\,\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow v = a\omega\sqrt{\sin\theta^2 + (1+\cos\theta)^2} = a\omega \times \sqrt{\underbrace{\sin\theta^2 + \cos\theta^2}_{1} + 1 + 2\cos\theta}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2}\,a\omega\sqrt{1+\cos\theta}}$$

v_{max} pour $\cos\theta_{max}$ soit $\underline{\theta = 0}$ et $v_{max} = \underline{2a\omega}$

3. Mvt hélicoïdal

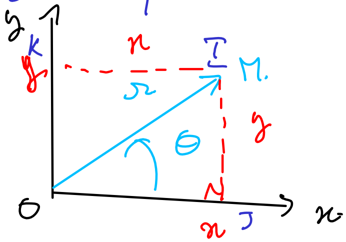
$$M\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = a.t. \end{cases}$$

R, a, ω ctes > 0.

1./ Coordonnées cylindriques : (r, θ, z)

$z = a.t.$

r, θ ?



équat° du cercle de centre O et de rayon R

Dans OIJ, $r^2 = x^2 + y^2 \Longleftrightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \Longleftrightarrow r = \sqrt{R^2\cos^2\omega t + R^2\sin^2\omega t} \Longleftrightarrow \boxed{r = R.}$

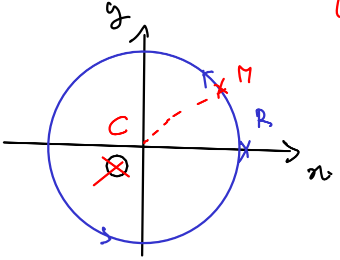
Dans OIJ,

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{R\cos\omega t}{R} = \cos\omega t. \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{R\sin\omega t}{R} = \sin\omega t \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \boxed{\theta = \omega t}$$

$M \begin{pmatrix} r = R \\ \theta = \omega t \\ z = at \end{pmatrix}$

$r = R \longrightarrow$ trajectoire circulaire.

$\theta = \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \implies$ mvt uniforme dans le plan Oxy.



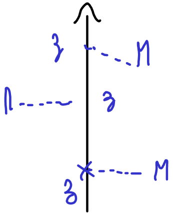
$C = \text{proj}_{\perp Oz}(M)$

↳ dans le plan Oxy, M décrit un mvt circulaire uniforme.

Faisons varier z.

$z = a \times t$, $a = \text{cte}$.

$\Rightarrow$ mvt rectiligne uniforme.

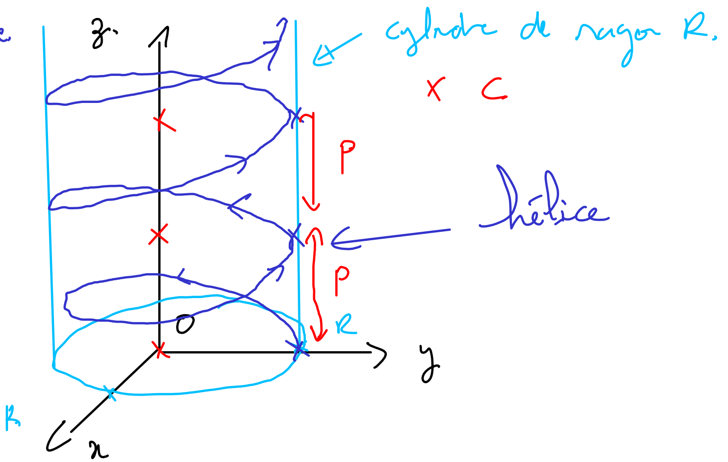


Finalement le mvt de M : mvt circulaire uniforme de rayon R de centre C

$+$

mvt rectiligne uniforme de direction $\vec{e_z}$

3/ Trajectoire



4/ Pas p de l'hélice : distance parcourue suivant l'axe de l'hélice (Oz) pendant la durée T d'un tour. ($\Delta\theta = 2\pi$)

$z = at \Rightarrow p = a \times T$ avec $\Delta\theta = 2\pi$ et $\theta(t) = \omega t \Rightarrow \underbrace{\Delta\theta}_{2\pi} = \omega T \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\Rightarrow \boxed{p = \frac{2\pi a}{\omega}}$ — L ; $L.T^{-1}$; T^{-1}

$a \nearrow \Rightarrow p \nearrow$

$\omega \nearrow \Rightarrow p \searrow$

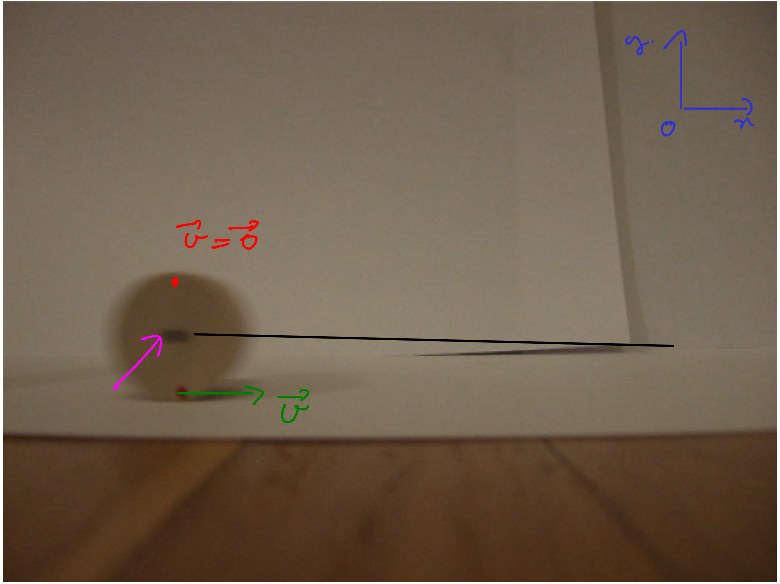
5/ $$\vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \cancel{\ddot{r}}^{\,0} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\cancel{\dot{r}}_{0}\dot{\theta} + r\cancel{\ddot{\theta}}^{\,0} \\ \cancel{\ddot{z}}^{\,0} \end{pmatrix}_{(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})}$$

avec $\begin{cases} r = R \\ \theta = \omega t \\ z = at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{z} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{r} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}(M) = -R\omega^2\vec{e_r}}$$

accélération purement radiale.

M3 - Mvt cycloïdal

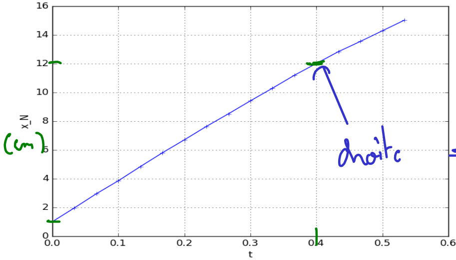


1/ Champ de vitesse du solide non uniforme
⇒ le mvt n'est pas une translation.

2/ ⚠ Ref

Ref du Centre de Masse : le mvt est un mvt de rotation autour de l'axe du cylindre.

Ref : terrestre. le mvt n'est pas une rotation : $\vec{v} \neq r\omega \vec{e_\theta}$



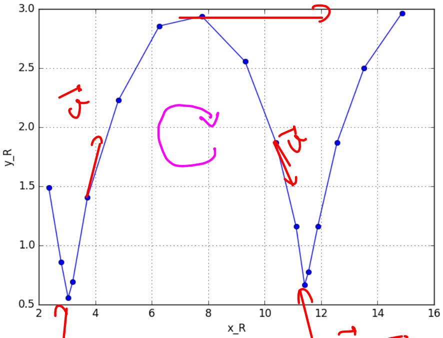
$x_N = f(t)$ Mvt rectiligne uniforme.

$x_N(t) = v.t + x_0$ avec v = cste = coeff dir de la droite.

A.N. : $v = \dfrac{12 - 1}{0,4 - 0} = \dfrac{11}{0,4} \sim \dfrac{110}{4} \sim 27,5$ $cm \cdot s^{-1}$

$\vec{v}$ vitesse max

3.2/

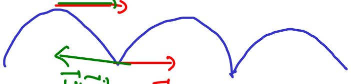


Mvt de R dans le ref terrestre.

Cycloïde : mvt de R.

vitesse moyenne : $v_R = v_N$

(faire le calcul sous Latis)

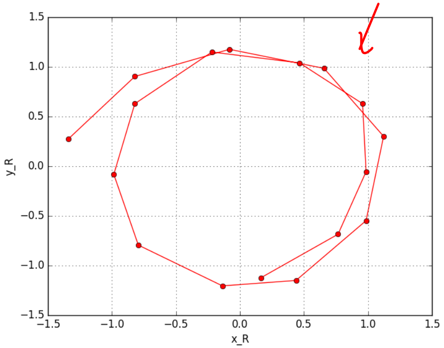


- Au sommet : $\vec{v}_{trans} + \vec{v}_{rot} = \vec{V}_{max}$.
- Au point de contact avec le sol : $\vec{v}_{trans} - \vec{v}_{rot} = \vec{0}$

3.3/ Trajectoire dans le ref du CM = pt N.

↳ chgt d'origine $\Rightarrow$ N = origine.

$R \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix}$ ds le ref terrestre $\Longrightarrow R \begin{pmatrix} x_R - x_N \\ y_R - y_N \end{pmatrix}$ sur Latis Pro. (tableau)



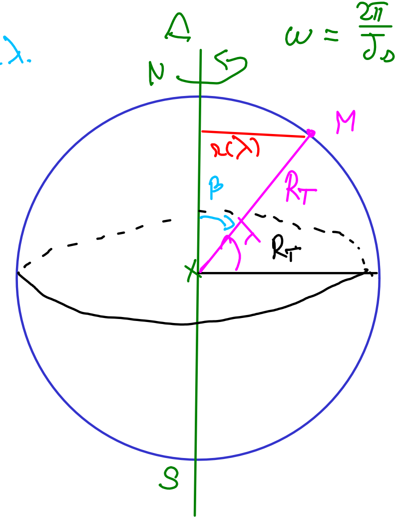
Trajectoire du R dans le ref du CM.

Grossièrement, le mvt de R est circulaire uniforme dans le ref barycentrique.

M4. Rotation propre de la Terre

$\beta = \frac{\pi}{2} - \lambda$.

$\omega = \frac{2\pi}{J_s}$



Vitesse $\vec{v}$ à la surface de la Terre :

— max : à l'équateur

— min : aux pôles géographiques

↳ $\vec{v} = \vec{0}$ sur l'axe de rotation.

λ : latitude.

Nantes : $\lambda \approx 49°$ N

dans le réf géocentrique.

Rotation uniforme à $\omega = \frac{2\pi}{J_s}$

M situé à r de l'axe Δ : $v = r\omega = \frac{2\pi r}{J_s}$

Mais $r = r(\lambda) = R_T \sin\beta = R_T \cos\lambda$

A.N. : $R_T \sim 6\times10^6$ m, $\cos\lambda \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \sim \frac{1}{1,5}$, $2\pi \sim 6$, $J_s \sim 86400$ s

$$v \sim 6\times10^6 \times \frac{1}{1,5} \times 6 \times \frac{1}{86400}$$

$$v \sim \underbrace{\frac{24}{86}}_{1/3} \times 10^{-3} \times 10^{6} \sim 300 \text{ m.s}^{-1}$$

D'où : $\boxed{v(\lambda) = R_T \cos\lambda \times \frac{2\pi}{J_s}}$